FIABILIDAD ESTRUCTURAL

Amalio Saiz de Bustamante

Profesor Emérito

Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales

Departamento de Ingeniería Nuclear

XII Congreso de Confiabilidad

Cádiz, 24, 25 y 26 de Noviembre de 2010

FIABILIDAD ESTRUCTURAL

INTRODUCCIÓN

- **FIABILIDAD**: Capacidad de un elemento de cumplir la función exigida en condiciones dadas durante un intervalo de tiempo dado t.

$$R(t) = \mathrm{Pr}(T > t), \quad \mathrm{T} = \mathrm{TTF}$$

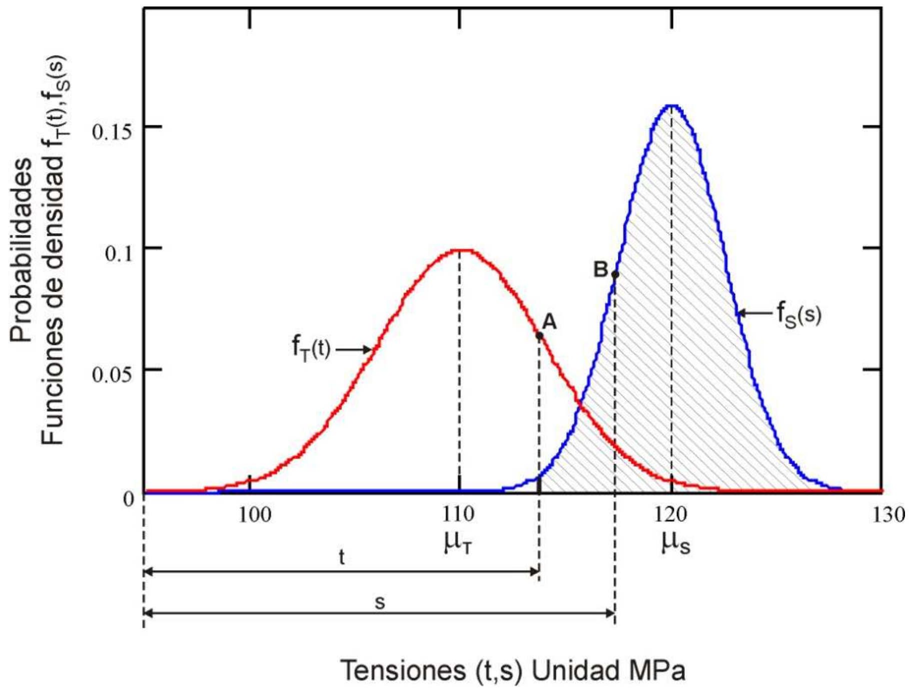
$$\text{Ejemplo}: \; \mathrm{R(t)=e^{-\lambda t}}, \quad \lambda = \text{Tasa de fallo}$$

- **FIABILIDAD ESTRUCTURAL**: Capacidad de una estructura de cumplir la misión exigida, lo que implica una **resistencia** (S) superior a los **esfuerzos** (T) que debe soportar.

$$R(s,t) = \mathrm{Pr}(S > T) = \iint_{s>t} f_{S,T}(s,t)\, ds\, dt$$

$$R(s,t) = \iint_{s>t} f_S(s)\, f_T(t)\, ds\, dt$$

DIAGRAMA RESISTENCIA-TENSIÓN (1)



$$Pr(t<s|A \in f_T(t)) = f_T(t)dt \int_t^{\infty} f_S(s)ds$$

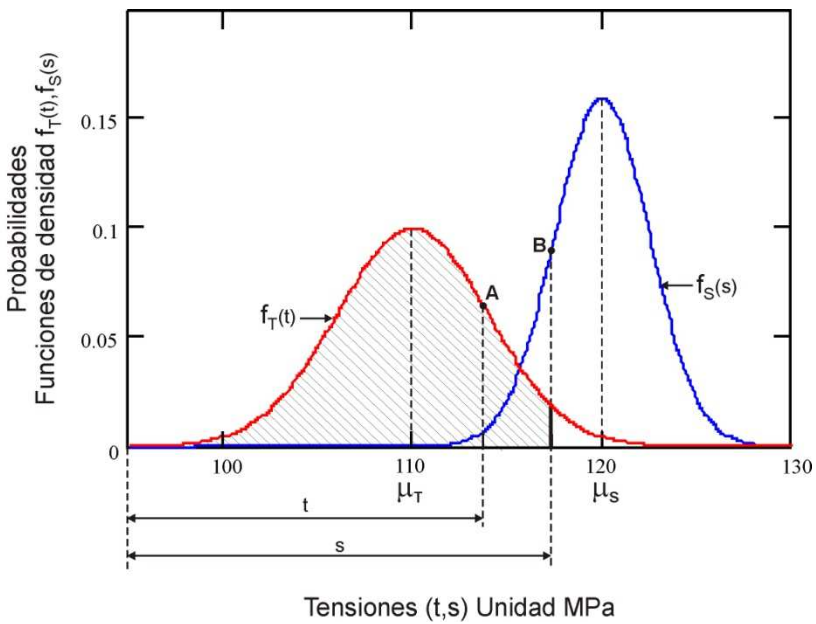
$$R(s,t) = Pr(S>T) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)[1-F_S(t)]dt$$

$$R(s,t) = Pr(T<S) = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s)F_T(s)ds \quad (3)$$

$$Q(s,t) = Pr(S \le T) = 1-Pr(S>T) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)F_S(t)dt \quad (4)$$

<u>Estructura</u>: **S**: Resistencia **T**: Tensión máxima

DIAGRAMA RESISTENCIA-TENSIÓN (2)



$$\Pr[(s > t \mid B \in f_S(t)] = f_S(s)ds \int_{-\infty}^{s} f_T(t)dt$$

$$R(s,t)=\Pr(T<S)=\int_{-\infty}^{\infty} f_S(s)F_T(s)ds \qquad (3)$$

Estructura: **S**: Resistencia **T**: Tensión máxima

MODELOS ESTADÍSTICOS (1)

1.Distribuciones estructurales normales:

Resistencia: **S** $\subset$ N(μ_S, σ_S); **Tensión max.**:**T** $\subset$ N(μ_T, σ_T)-

Nueva v.a: **X = S - T**, **X $\subset$ N(μ_X, σ_X);** $\mu_X = \mu_S - \mu_T$; $\sigma_X = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_T^2}$

$$R(s,t)=Pr(S>T)=Pr(X>0) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right)dx$$

Z $\subset$ N(0,1) $\rightarrow x = \sigma_X z + \mu_X,\ x = 0,\ z_0 = -\frac{\mu_X}{\sigma_X} = -\frac{\mu_S - \mu_T}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_T^2}} = -\ MS$

$$R(z)=Pr(Z>z_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_0}^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dx$$

Margen de Seguridad: **MS =** $\boldsymbol{\frac{\mu_S - \mu_T}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_T^2}}}$

$R(z)=\Phi(MS)$

$Q(z) = 1 - \Phi(MS)$

MODELOS ESTADÍSTICOS (2)

Caso práctico 1º: Elemento estructural. Distribuciones normales (Diapositivas 4 y 5).

Resistencia: $S \subset N(120, 2.5)$; **Tensión max.** :$T \subset N(110, 4)$

Nueva v.a: $X=S-T$: $X \subset N(\mu_X, \sigma_X)$

$\mu_X = 120 - 110 = 10$; $\sigma_X = \sqrt{2.5^2 + 4^2} = 4.717$

$X \subset N(10, 4.717)$

$$MS = \frac{\mu_S - \mu_T}{\sqrt{\sigma_S{}^2 + \sigma_T{}^2}} = \frac{10}{4.717} = \mathbf{2.12}$$

$$R(z) = \Phi\left(MS\right) = \Phi\left(\mathbf{2.12}\right) = \mathbf{0.983}$$

$$Q(z) = 1 - \Phi\left(MS\right) = 1 - \Phi\left(\mathbf{2.12}\right) = \mathbf{0.017}$$

MODELOS ESTADÍSTICOS (3)

2. Distribuciones estructurales lognormales:

Resistencia: $\ln S \subset N(\mu_{\ln S}, \sigma_{\ln S})$; **Tensión max**: $\ln T \subset N(\mu_{\ln T}, \sigma_{\ln T})$

Nueva v.a: $X=S/T$; $\ln X = \ln S - \ln T$; $\mathbf{X \subset \Lambda(\mu_X, \sigma_X), \ \ln X \subset N(\mu_{\ln X}, \sigma_{\ln X})}$

$$\mu_{\ln X} = \mu_{\ln S} - \mu_{\ln T}; \quad \sigma_{\ln X} = \sqrt{\sigma_{\ln S}^2 + \sigma_{\ln T}^2}$$

1º $\mu_{\ln X}, \sigma_{\ln X}$, conocidos

$$R(s,t) = \Pr(S/T>1) = \Pr(X>1) = \Pr(\ln X>0) = \frac{1}{\sigma_{\ln X}\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu_{\ln X})^2}{2\sigma_{\ln X}^2}\right) dx$$

$$\ln x = \sigma_X z + \mu_{\ln X}, \quad Z \subset N(0,1); \ x=1, \ z_0 = -\frac{\mu_{\ln X}}{\sigma_{\ln X}} = -\frac{\mu_{\ln S} - \mu_{\ln T}}{\sqrt{\sigma_{\ln S}^2 + \sigma_{\ln T}^2}} = -\ MS$$

$$R(z) = \Phi(MS); \quad Q(z) = 1 - \Phi(MS)$$

2º μ_X, σ_X, conocidos

$$\mu_{\ln X} = \ln\left(\frac{\mu_X}{\sqrt{1 + (\boldsymbol{\sigma}_X / \mu_X)^2}}\right), \quad \sigma_{\ln X} = \sqrt{1 + (\boldsymbol{\sigma}_X / \mu_X)^2}$$

MODELOS ESTADÍSTICOS (4)

Caso práctico 2º: Elemento estructural Distribuciones lognormales

Resistencia: $S \subset \Lambda(120, 2.5)$; Tensión : $T \subset \Lambda(110, 4)$

Resistencia: $\ln S \subset (4.7873, 0.021)$; Tensión : $\ln T \subset N(4.6998, 0.036)$

Nueva v.a. X=S/T; $\ln X \subset N(\mu_{\ln X}, \sigma_{\ln X})$

$$\mu_{\ln X} = \mu_{\ln S} - \mu_{\ln T}, \; \mu_{\ln X} = 4.7873 - 4.6998 = 0.0875$$

$$\sigma_{\ln X} = \sqrt{\sigma_{\ln S}{}^2 + \sigma_{\ln T}{}^2} = 0.0514$$

$$\ln X \subset N(0.0875, 0.0514)$$

$$MS = \frac{\mu_{\ln S} - \mu_{\ln T}}{\sqrt{\sigma_{\ln S}{}^2 + \sigma_{\ln T}{}^2}} = 1.71$$

$$R(z) = \Phi(MS)) = \mathbf{0.9574}$$

$$Q(z) = 1 - \Phi(MS) = \mathbf{0.0426}$$

INDICES DE SEGURIDAD

- **Variabilidad de esfuerzos y resistencias en una estructura**.
- **Factor de seguridad:**

$$FS = \frac{\mu_S}{\mu_T} = \frac{120}{110} = 1.09$$

- **Margen de seguridad**:

$$MS = \frac{\mu_S - \mu_T}{\sqrt{\sigma_S{}^2 + \sigma_T{}^2}} = \frac{120 - 110}{\sqrt{4^2 + 2.5^2}} = 2.12$$

$$R(MS) = \Phi(2.12) = 0.983$$

En general:

$$R(z)=\Phi(MS) \qquad MS=\Phi^{-1}(R(z))$$

ESTRUCTURA MULTIELEMENTO

- **Estructuras con n elementos en serie**

$$R_i=\Phi(MS_i)=\Phi\left(\frac{\mu_S-\mu_T}{\sqrt{\sigma_S^2+\sigma_T^2}}\right)$$

$$R_{serie}=\prod_{i=1}^{m}\Phi(MS_i)=\prod_{i=1}^{m}\Phi\left(\frac{\mu_{S,i}-\mu_{T,i}}{\sqrt{\sigma_{S,i}^2+\sigma_{T,i}^2}}\right)$$

<u>Ejemplo</u> de estructura serie: elementos del edificio de contención de un PWR: Membranas cilíndrica(1), longitudinal(2,) domo(3), apoyo – unión solera (4);y unión con la estructura cilíndrica de la compuerta de acceso(5),

$$R_E=\Phi(MS_1)\cdot\Phi(MS_2)\cdot\Phi(MS_3)\cdot\Phi(MS_4)\cdot\Phi(MS_5)$$

- **Elemento con solicitación múltiple**:

$$R=\int_0^{\infty}\prod_{1}^{m}F_T(s)f_S(s)ds$$